Quelques éléments sur la théorie du chaos

Philippe Etchecopar

Cégep de Rimouski

Table des matières

La théorie du chaos :

un nouveau paradigme pour les sciences ?

La plus grande faiblesse de la pensée contemporaine me paraît résider dans la surestimation extraordinaire du connu par rapport à ce qui reste à connaître.

André Breton 1937

La théorie du chaos est une des rares, une des très rares, théories mathématiques qui ait connu un vrai succès médiatique. C'est même devenu une théorie à la mode qu'il est de bon ton de pouvoir citer si l'on veut passer pour quelqu'un de cultivé. Nous verrons même que certains des grands esprits de ce siècle l'ont cité sans manifestement savoir de quoi ils parlaient. Apparue au début des années soixante en météorologie, elle s'est rapidement étendue à peu près toutes les sciences. Certains y ont vu, ou y voient encore, une révolution scientifique d'une importance identique à l'apparition de la mécanique de Newton, de la relativité d'Einstein ou de la mécanique quantique. Le but de ce qui suit n'est pas de juger ce genre d'opinions, mais de rappeler quelques faits élémentaires et d'indiquer quelques enjeux soulevés par cette théorie, et âprement discutés.

Le père officiel :

Lorenz, son Royal McBee et son papillon

Les années soixante

D'abord, comment expliquer ce succès ? Le nom y est peut-être pour quelque chose. Inconsciemment certains y ont vu une confirmation de ce qu'ils pensaient des mathématiques sans trop oser le dire : tout cela est complètement chaotique, on s'en doutait mais maintenant ce sont les mathématiciens eux-mêmes qui le disent.... D'autres, au contraire, se sont réjouis de voir que même le chaos allait devenir un champ mathématique et que celles-ci allaient mettre un peu d'ordre dans tout cela.

Il y avait peut-être aussi l'époque qui a contribué au succès de la théorie du chaos. Elle est née au milieu des mythiques années 60, celles des Beattles, de Kennedy, des hippies et des manifestations contre la guerre du Viêt-nam; Smale, un des principaux mathématiciens à l'origine de la théorie du chaos, n'a-t-il pas dénoncé depuis Moscou l'intervention américaine au Viêt-nam, ce qui lui a causé quelques problèmes avec le

F.B.I. ? En plus, il y avait peut-être un lieu mythique, le campus du Massachusetts Institut of Technology, un objet symbolique, un des premiers ordinateurs, ici un Royal McBee LGP-300. Il y avait peut-être aussi un domaine qui fascine l'inconscient des gens, la météo, et un savant comme on les aime, distrait, incompris et génial, ici Edward Lorenz, professeur de mathématiques au M.I.T. Il y avait aussi, même si on en parle moins, des équations différentielles, un peu de mécanique des fluides et pas mal de convection. Tous ces ingrédients ont certainement contribué au grand succès médiatique de « la théorie du chaos ». Mais ils n'expliquent pas tout, bien évidemment. Tous les mythes ont leur envers. Car à regarder de plus près le fameux Royal McBee, il occupait la moitié d'une pièce, ses tubes à vide sautaient régulièrement et il n'avait guère plus de puissance qu'une calculatrice actuelle. Les bulletins météo n'avaient rien à voir avec les spectacles 3D des miss Météos d'aujourd'hui et se présentaient sous la forme austère de colonnes de chiffres à six décimales. Lorenz, passionné dans son enfance par les problèmes de mathématiques qui n'avaient pas de solutions, avait découvert la météorologie lorsqu'il avait été mobilisé dans les services de météo pendant la guerre. Professeur de mathématiques au M.I.T., sa passion pour la météo en avait fait un marginal parmi ses pairs qui étaient, eux, de purs mathématiciens.

Seul le mythique M.I.T. est resté le mythique M.I.T. Pour comprendre l'importance et les raisons du succès de la théorie du chaos, commençons donc par revivre cette journée de l'hiver 1961 qui allait changer le destin de Lorenz et devenir celle de la naissance (médiatique) de la théorie du chaos.

Les prévisions météorologiques

Auparavant quelques rappels s'imposent pour mieux comprendre le sens des événements de cette journée et d'en mesurer la portée. L'objet de la météorologie, c'est l'étude puis la prévision du déplacement des masses d'air de l'atmosphère. Comme on parle de « mouvement », il faut donc remonter à Newton, à ses lois et à son calcul différentiel. Ceux-ci permettaient de déterminer la trajectoire d'un corps à partir de l'étude de son mouvement. Le mouvement se définissait par une équation différentielle qu'il suffisait de résoudre pour en déduire la trajectoire du corps. Cette méthode se révéla immédiatement efficace pour déterminer le mouvement des planètes, des comètes, le mouvement des marées, etc. Connaissant les trajectoires, il était facile de prévoir le passage des comètes, les heures des marées, etc. Les mathématiques de Newton réussissaient là où avaient échoué les mages, les prêtres et les devins : elles permettaient de prédire l'avenir, au moins celui des marées, des éclipses ou autres phénomènes astronomiques. Encouragés par ces succès, les mathématiciens du XVIIe, comme Euler, D'Alembert, Lagrange et d'autres, élargirent les applications du calcul différentiel. En traduisant en équations différentielles le mouvement de divers corps (propagation du son, de la chaleur, des fluides, etc.), les mathématiques allaient permettre de prévoir leur comportement. C'est le triomphe de la mécanique newtonienne. Le futur devenait prévisible : il suffisait de traduire le mouvement en équations différentielles et de les résoudre. Sur leur lancée, les mathématiciens et philosophes de cette époque pensaient que l'Univers était réglé comme une horloge. Penser que le mouvement de l'univers est réglé comme celui d'une horloge est même devenu un dogme de la physique classique. Tout mouvement, que ce soit celui d'une planète ou d'une molécule, étant régi par les mêmes lois était donc prédictible. Ce n'était qu'une question de calculs. Le hasard n'existait pas, tout mouvement semblant relever du hasard n'était qu'un mouvement que l'on n'était pas encore capable de calculer. Le monde étant régi par des lois, l'avenir devenait prévisible. En théorie, du moins.

La météorologie consiste donc à prévoir le déplacement de grandes masses d'air. Dans la foulée de la mécanique newtonienne, il suffisait alors de traduire par des équations différentielles le déplacement de ces masses, puis de résoudre ces équations. En théorie le temps serait alors aussi prévisible que le mouvement des planètes, un vrai mécanisme d'horlogerie. Pour établir le « modèle » d'un phénomène naturel, il y avait trois étapes majeures à suivre : observer le phénomène, le traduire en équations et enfin résoudre ces équations. C'est au niveau de la troisième étape, celle de la résolution des équations, que les difficultés sont apparues. Certaines de ces équations étaient difficilement résolvables et d'autres ne l'étaient pas du tout . Ces équations, à se taper la tête contre un mur, se retrouvaient dans différentes branches de la physique newtonienne classique, que ce soit dans l'écoulement des fluides ou dans la trajectoire des planètes lorsqu'on les étudiait attentivement. Le cas le plus fameux est celui dit « des trois corps ». Si les lois de Newton et le calcul différentiel permettent d'évaluer le mouvement de deux planètes soumises à leurs seules forces mutuelles de gravitation, dès qu'une troisième planète s'en mêle, les calculs deviennent

inextricables. Nous reviendrons sur ce problème des trois corps. C'est la même chose dans bien des équations relevant de l'écoulement des fluides. Devant ces difficultés, les mathématiciens des XVIIIe et XIXe siècles ont trouvé une méthode peu élégante mais bien pratique : si les équations sont trop compliquées, il n'y a qu'à les simplifier !!! C'est ce qu'ils firent. Simplifier les équations c'est surtout les « linéariser » comme vous l'avez vu dans les cours de calcul différentiel et intégral. Linéariser une équation, c'est la remplacer par une équation équivalente du premier degré, du moins dans certaines conditions et pour certaines valeurs de la variable. Persuadés que « les effets sont proportionnels aux causes », ce qui était un autre dogme dans la physique classique, les savants de l'époque étaient convaincus qu'en se débarrassant de termes compliqués qui ne jouaient qu'un rôle mineur, ils n'affecteraient les réponses que sur un mode mineur également. Revenons à la météorologie. L'objet de cette science, c'est d'établir des équations permettant d'expliquer, de représenter et de prévoir le déplacement de masses d'air. Les lois à la base de ce mouvement sont évidemment les lois de Newton, mais aussi les lois de l'écoulement des fluides, la loi dite de Navier-Stokes étant la plus connue d'entre elles et les lois de la convection. Une autre loi importante pour expliquer les déplacements des masses d'air est la loi de Mariotte qui établit un lien entre la pression, la masse volumique et la température d'un gaz.

Pour leur part, les lois de Navier-Stokes se présentent sous la forme suivante :

$$\partial \vec{V} + \left(\vec{V}.\nabla\right)\vec{V} + \frac{1}{\rho}\nabla P = \nu\nabla^2\vec{V} + \vec{F}$$

$$\nabla.\vec{V} = 0$$

avec :

$\vec{V}$: vitesse

P : pression

ρ : masse volumique

$\vec{F}$: résultante des forces extérieures par unité de masse

v : viscosité cinématique moléculaire

Le phénomène de la convection, quant à lui, repose sur une observation très simple : l'air chaud monte, l'air froid descend. Le soleil chauffe le sol ou les océans, qui réchauffent l'air, qui se met à monter, qui refroidit en altitude et qui redescend. Il s'agit alors de déterminer la façon dont le sol chauffe l'air et la façon dont la haute atmosphère le refroidit pour prévoir son déplacement. Le mouvement engendré n'est pas simple : il suffit d'observer comment se comporte l'eau d'une casserole que l'on met sur un poêle pour s'en convaincre. De plus il faut tenir compte de la différence de température entre les pôles et l'équateur, de la rotation de la terre qui engendre des vents le plus souvent d'ouest, etc. ces conditions au sol varient considérablement d'un endroit à l'autre, une multitude d'autres facteurs interviennent, si bien que le mouvement de toute masse d'air recouvre, en fait, les mouvements de la multitude des petites masses qui la composent. Plusieurs savants, dont Henri Bénard au début du siècle, puis Lord Raylegh, définirent des lois régissant la convection.

Ça, ce sont les principes. Quand on commence à entrer au niveau des calculs, ce n'est pas si simple. Pour déterminer le déplacement de masses d'air, donc prévoir le temps qu'il fera, les savants faisaient face à un dilemme. Ou bien ils essayaient, à partir des lois de l'écoulement des fluides et celles de la convection, d'établir des équations différentielles aussi précises que possible avec des données aussi nombreuses que possible, et alors ils risquaient d'obtenir des solutions représentant la propagation des sons et des ondes et de se perdre dans les calculs et les détails. Pour vous donner une idée, les prévisions météorologiques demandent des observations par un ensemble de stations situées à moins de 100 km les unes des autres et cela implique environ un million de variables! Ou bien ils essayaient de simplifier les équations et alors les solutions obtenues seraient plus simples mais si générales qu'elles ne permettraient plus de prévoir le temps exact. Dans le premier cas, on mettait l'accent sur l'exactitude des prévisions et, dans le second cas, on privilégiait la compréhension du phénomène, quitte à ne pouvoir prévoir précisément le temps qu'il fera à un moment donné et pour un lieu donné.

Des équations simples, mais non-linéaires

Le premier coup de génie de Lorenz a été de choisir délibérément la compréhension aux dépens de la prévision. Il a donc établi un système d'équations différentielles ultra simplifiées de seulement trois variables qui permettaient de déterminer l'évolution de masses d'air.

Ce système ultra simplifié, avec seulement trois variables, est représenté par les équations ci-dessous, dit, parfois, « système de Lorenz » :

$$\frac{dx}{dt} = \Pr(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = -xz + Rx - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

où *Pr* représente le nombre de Prandtl du fluide, *R* est proportionnel au nombre de Rayleigh et *b* est relié au vecteur d'onde convectif. Les variables *x* et *y* sont respectivement proportionnelles aux amplitudes du champ de vitesse et du champ de température alors que *z* est relié au mode vertical de température. Enfin *t* est le temps.

Vous remarquerez, cela aura de l'importance plus tard, que ces équations ne sont pas linéaires : elles comportent les termes *-yz* et *xy* qui ne sont pas linéaires.

Ordinateur, modèle et simulations

Le second coup de génie a été d'utiliser un ordinateur. Il faut se rappeler que nous sommes en 1961. Le premier ordinateur digne de ce nom, l'E.N.I.A.C., n'avait pas quinze ans et ses performances n'avaient rien à voir avec les ordinateurs actuels. Ces ordinateurs, qui fonctionnaient avec des tubes à vide, étaient de véritables éléphants et, toujours comparés à ceux d'aujourd'hui, ils avaient une lenteur éléphantesque également. On ne voyait leur intérêt que dans des circonstances où il fallait effectuer de nombreux calculs répétitifs, comme, des tables d'artillerie, des simulations de réaction nucléaire ou... des calculs de prévision météorologique dont les données initiales devaient toujours être remises à jour. En fait, peu de personnes prévoyaient un grand avenir pour les ordinateurs, y compris le patron d'I.B.M., Watson, qui évaluait au début des années cinquante qu'avec dix appareils, le marché mondial serait saturé! Ces premiers ordinateurs étaient si énormes et si pénibles à entretenir que seules quelques très grandes organisations pouvaient les utiliser. Quelques personnes voyaient quand même plus loin. Ainsi Von Neumann, le mathématicien qui dans le cas de l'E.N.I.A.C. avait inventé le concept de programme, estimait, lui, que l'ordinateur était l'outil idéal pour prévoir le temps et pour le contrôler par la suite. Dans la droite ligne de la physique classique, il pensait que les lois régissant la météo étaient des lois parfaitement déterministes et que prévoir le temps n'était qu'une question de capacité de calcul. C'était justement là que résidait la force des ordinateurs des années cinquante.

Le coup de génie de Lorenz a été de comprendre que l'utilité de l'ordinateur ne se limitait pas à effectuer inlassablement les mêmes opérations. Il comprit que l'ordinateur lui permettait d'expérimenter ses idées, de tester le rôle d'un paramètre, de simuler des hypothèses et d'établir par essais et erreurs un modèle qui correspondrait de plus en plus à la réalité observable. Cette façon de travailler détonnait parmi ses collègues mathématiciens davantage portés sur la spéculation. Un pur mathématicien vous dira, que comme les Grecs, qu'il n'a besoin que d'un crayon, d'une règle et d'un compas. Et encore. Les bourbakistes, les purs parmi les purs, mettaient même leur point d'honneur à utiliser le moins de figures possible, pour eux, associer une image à un concept, c'est introduire le vers de fausses réalités dans le fruit du monde des idées, comme l'aurait dit Platon.

Lorenz s'était donc équipé d'un ordinateur, un Royal McBee LGP-300. Cette machine était encore munie de tubes à vide, elle occupait la moitié de son bureau et le chauffait comme l'enfer lorsqu'elle fonctionnait. Il n'y avait pas d'écran et les résultats sortaient sous forme de colonnes à six décimales qu'il fallait interpréter. Pour avoir une idée de sa puissance, elle effectuait soixante multiplications par seconde, alors qu'un ordinateur personnel bon marché d'aujourd'hui en effectue plusieurs dizaines de millions et que les ordinateurs des services météo modernes peuvent effectuer mille milliards d'opérations par seconde...

Donc Lorenz travaillait à améliorer son modèle en testant les différents facteurs qui y entraient, en simulant, en bâtissant des scénarios de beau temps et de tempêtes, cherchant toujours à comprendre comment évoluaient les masses d'air.

Le temps restera imprévisible!

Nous arrivons à cette fameuse journée de l'hiver 1961. Lorenz avait fourni une série de données à son Royal McBee. Celui-ci les avait longuement digérées, puis les avait longuement traitées et quelques heures plus tard, avait imprimé ses colonnes de chiffres. Lorenz examina ces résultats et décida de refaire une passe pour s'assurer de certains résultats. Mais la chaleur dégagée par son Royal McBee lui avait donné soif et, pressé d'aller se chercher un café, plutôt que de rentrer de nouveau les données avec leurs six décimales, il n'en garda que trois. Après tout, l'incertitude ne serait que d'un millième plutôt que d'un millionième. Comme tout scientifique, Lorenz était persuadé que des petites incertitudes au départ ne peuvent engendrer que de petites incertitudes à l'arrivée. De toute façon, il connaissait les résultats et voulait seulement s'en assurer. Surtout il avait grande envie de boire un café, ce qui pour un scientifique est bien légitime. Après avoir entré ses données arrondies au millième et lancé son Royal McBee, il alla donc prendre tranquillement son café. Quand il rentra dans son bureau et qu'il examina les nouveaux résultats, il crut que l'un des tubes à vide de son ordinateur avait flanché une fois de plus : si au début les résultats ressemblaient à ceux de la passe précédente, ils en divergeaient très vite. Au point que les deux systèmes météorologiques n'avaient plus rien à voir. Le premier pouvait représenter une tempête sur le pôle Nord et le second une sécheresse sous les tropiques. Pourtant ces deux résultats représentaient le traitement de données extrêmement voisines par un même système d'équations très simples. Pour une fois les tubes à vide avaient bien fonctionné. Les fonctions linéaires impliquant des résultats proportionnels aux incertitudes initiales, ici de l'ordre du millième, la divergence des résultats ne pouvait s'expliquer que par la présence de termes non linéaires dans les équations du modèle. Lorenz venait de découvrir que dans des systèmes non linéaires d'infimes différences dans les conditions initiales engendraient à la longue des systèmes totalement différents. Lorenz comprit alors qu'il serait à jamais impossible de prédire la météo à moyen ou à long terme. Cela remettait en cause les belles certitudes de la physique classique. Certains phénomènes dynamiques non linéaires sont si sensibles aux conditions initiales que, même s'ils sont régis par des lois rigoureuses et parfaitement déterministes, les prédictions exactes sont impossibles. Comme la plupart des phénomènes sont non linéaires, on comprend alors l'importance de la découverte de Lorenz.

Dans le mouvement des masses d'air, de petites perturbations peuvent s'amplifier rapidement si rien n'y fait obstacle. On a mesuré qu'une petite perturbation double chaque jour : elle est multipliée par mille en dix jours, un million en trois semaines et un milliard en un mois. Quand on parle de turbulence, un changement microscopique devient un changement macroscopique en une minute environ, On a calculé qu'il faut

environ un jour pour qu'un changement sur une distance de l'ordre du centimètre devienne un changement sur des distances de l'ordre de la dizaine de kilomètres. La sensibilité aux conditions initiales est mesurée par ce qu'on appelle le « temps caractéristique ». Il s'agit du délai après lequel une différence *d* est multipliée par un facteur 10 et devient 10*d*.

Pour mieux faire comprendre l'importance de cette sensibilité aux conditions initiales, Lorenz eut recours à une image qui contribua au succès médiatique de la théorie du chaos : celle de son fameux papillon. Lorenz venait de remarquer qu'une différence minime dans les données initiales de son modèle, avait provoqué des différences majeures dans les prévisions météorologiques à moyen terme. Il expliqua donc que les lois de la météo sont si sensibles aux conditions initiales, que le simple battement des ailes d'un papillon au Brésil peut déclencher une tornade au Texas. Ce qu'il voulait dire par là, c'était qu'une donnée infime, imperceptible, pouvait, si elle était amplifiée de proche en proche, aboutir à une situation météorologique complètement différente de celle qui avait été calculée sans tenir compte de cette donnée infime. En théorie le modèle marchait : les lois étaient bien définies et se calculaient pour n'importe quelles valeurs des variables. Mais en pratique, pour que le résultat concorde avec l'évolution de la météo, il faut tant de données et il faut qu'elles soient si précises, que l'avenir météorologique est incalculable. Lorenz venait de découvrir que chaque phénomène physique avait son « horizon de prédictibilité ». Dans le cas de la météo, les prévisions fiables ne peuvent dépasser une semaine. Le physicien David Ruelle mentionne dans *Le hasard aujourd'hui*[37], page 171, qu'après quinze jours, pour prévoir le temps, il faudrait tenir compte de l'effet gravitationnel qu'aurait un électron situé à 10^{10} années-lumière de la Terre. C'est évidemment impossible. Avec les immenses moyens de calcul d'aujourd'hui, les prévisions météorologiques ne sont plus crédibles après environ cinq jours. Il est douteux que nous atteignions un délai de deux ou trois semaines.

L'attracteur étrange

Lorenz prenait à contre-pied un des dogmes de la physique classique pour qui tout peut se calculer. Il venait de démontrer que l'avenir est imprévisible. Faut-il en déduire que la science est impuissante en dehors du « hic et nunc »? Après tout si nous ne sommes pas capables de prédire le temps le mois prochain, nous savons que les saisons se suivent et qu'il fera plus chaud en été qu'en hiver. Lorenz avait-il démontré qu'à long terme c'est le chaos ? Pas du tout. D'abord ce qu'on ne peut calculer n'est pas forcément chaotique! Surtout, toujours avec son Royal McBee, Lorenz a découvert, ou plutôt popularisé, un autre phénomène que celui de la sensibilité aux conditions initiales, celui des « attracteurs étranges ».

[37] RUELLE, David. *Le hasard aujourd'hui,* Le Seuil, collection Points-Sciences, Paris, 1991, 234 p..

Pour bien comprendre de quoi il s'agit, posons nous une première question. Quand on étudie un système qui évolue au cours du temps, un système dynamique, ici en ensemble de masses d'air, comment bien « voir » son évolution? On peut toujours tenter de déchiffrer les colonnes de chiffres caractérisant le système à chaque instant pour essayer d'en comprendre la signification. Mais même les spécialistes trouvent cela ardu. Nous dirions aujourd’hui que pour bien comprendre un phénomène, il faut dans une première étape l’observer et, si possible, en faire une figure. En étudiant un système dynamique analogue à celui des déplacements de masses d’air, le mouvement de trois planètes, Poincaré a donc imaginé une représentation géométrique de ce type de phénomènes. Il a inventé un « espace des phases » dont la dimension correspondait à l'ensemble des variables caractérisant le système à un instant donné (positions, vitesses, etc.). Pour cet instant donné, le système est donc caractérisé par un point de cet espace. À l'instant suivant il sera caractérisé par un autre point et ainsi de suite. Cette suite de points montre graphiquement l'évolution du système dans le temps. Au passage, il ne faut pas confondre l’espace des phases, dont les dimensions sont diverses caractéristiques du système, avec l’espace euclidien à trois dimensions où se situe la trajectoire du mouvement de ce système. Évidemment la visualisation de cette évolution ne peut se faire que dans un espace à deux ou trois dimensions correspondant aux variables les plus intéressantes de l'espace des phases. C'est à partir de cette idée que Poincaré développa une nouvelle branche des mathématiques, la topologie.

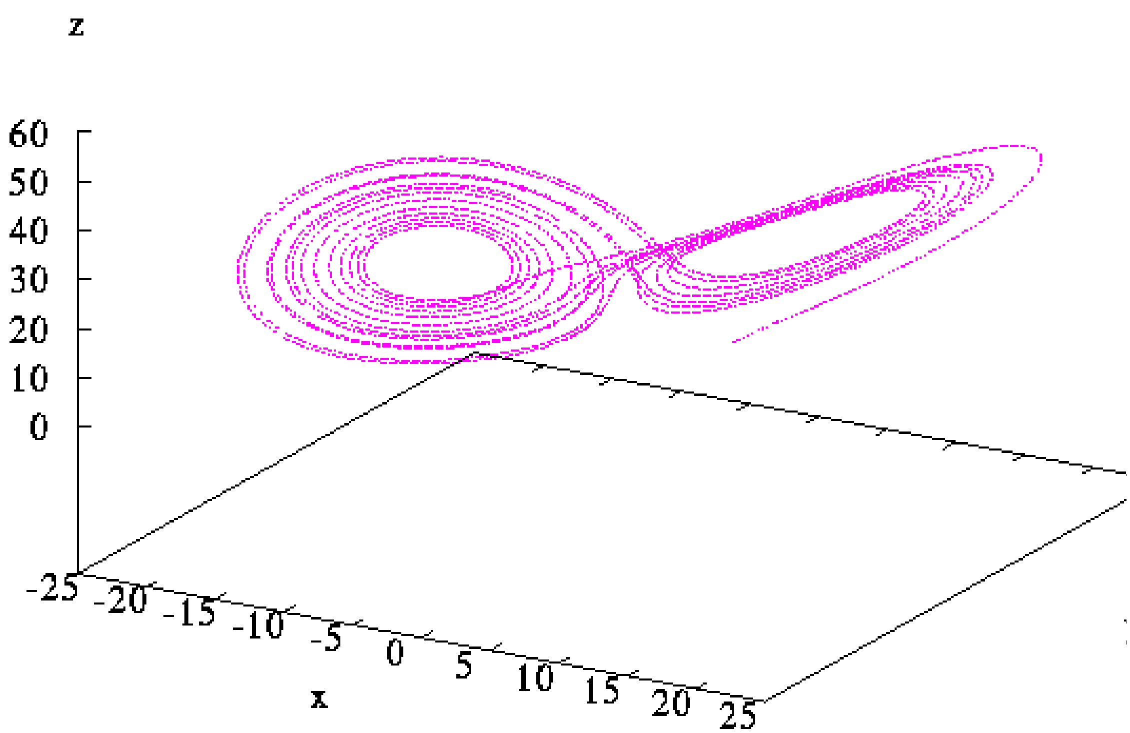
On imagine alors à quoi peuvent ressembler les trajectoires dans l'espace des phases de différents types de systèmes dynamiques. D'abord, si un système tend vers un état d'équilibre, par exemple une bille qu'on laisse rouler depuis le bord d'une cuve : quel que soit le point de départ, la bille ira s'immobiliser au fond. Dans l'espace des phases nous constaterions que quel que soit le point de départ, la suite de points représentant les différents états de la bille convergerait vers le point fixe représentant l'état d’équilibre. Ce point de l’espace des phases vers lequel convergeront tous les points représentant les différents états du système est appelé *l’attracteur*. Ensuite si un système évolue de façon périodique, par exemple le mouvement de la Terre par rapport au Soleil, la Terre retrouvant régulièrement les mêmes états par rapport au Soleil, les points décrivant les états successifs de la Terre finiront eux aussi par décrire une figure régulière. Dans ce cas c'est cette figure qui devient l'attracteur. Quel que soit l’état initial de la Terre, les points représentant ses différents états finiront toujours par décrire cette figure. Enfin, imaginons un système qui évolue de façon totalement imprévisible. Les points représentant ses différents états, se répartissent alors au hasard dans l’espace des phases, Aucune figure n’apparaît, l’espace des phases se remplit de points répartis également. Il n’y a pas d'attracteur.

Revenons à Lorenz et à sa seconde découverte majeure. Si Poincaré a eu l'intuition de l'espace des phases, il en a eu une vision théorique, celle de la topologie. Déterminer les trajectoires d'un système dynamique dans l'espace des phases demande une somme astronomique de calculs : les positions de chacun des points représentant les états du système doivent être calculées une par une. Poincaré n'avait ni ordinateur, ni

calculatrice, mais une simple table de logarithme. Lorenz, lui, avait un ordinateur ce qui était plus efficace qu'une table de logarithme, même s'il était lent, bruyant, fragile et s'il dégageait une chaleur d'enfer.
Avec son ordinateur, il décida donc de représenter graphiquement la solution de son système d'équations en prenant comme conditions initiales :

$$x(0) = 5, \; y(0) = 5 \;\text{ et }\; z(0) = 5.$$

Il lança son Royal McBee qui calculait, instant par instant, l'évolution de son système météorologique et observa la figure qui apparaissait très lentement. Les points représentant les états successifs du système partirent sur la droite, décrivirent une sorte de boucle, repartirent sur la gauche, décrivirent quelques boucles à peu près mais pas tout à fait dans le même plan, à peu près mais pas tout à fait concentrique, puis repartirent vers la boucle de droite pendant quelques trajectoires et ainsi de suite. La suite des points basculait d'une boucle à l'autre, sans rythme particulier, un peu au hasard. Mais une figure ressemblant aux deux ailes déployées d'un papillon (encore!) apparaissait de plus en plus clairement comme l'indique la figure ci-dessous.

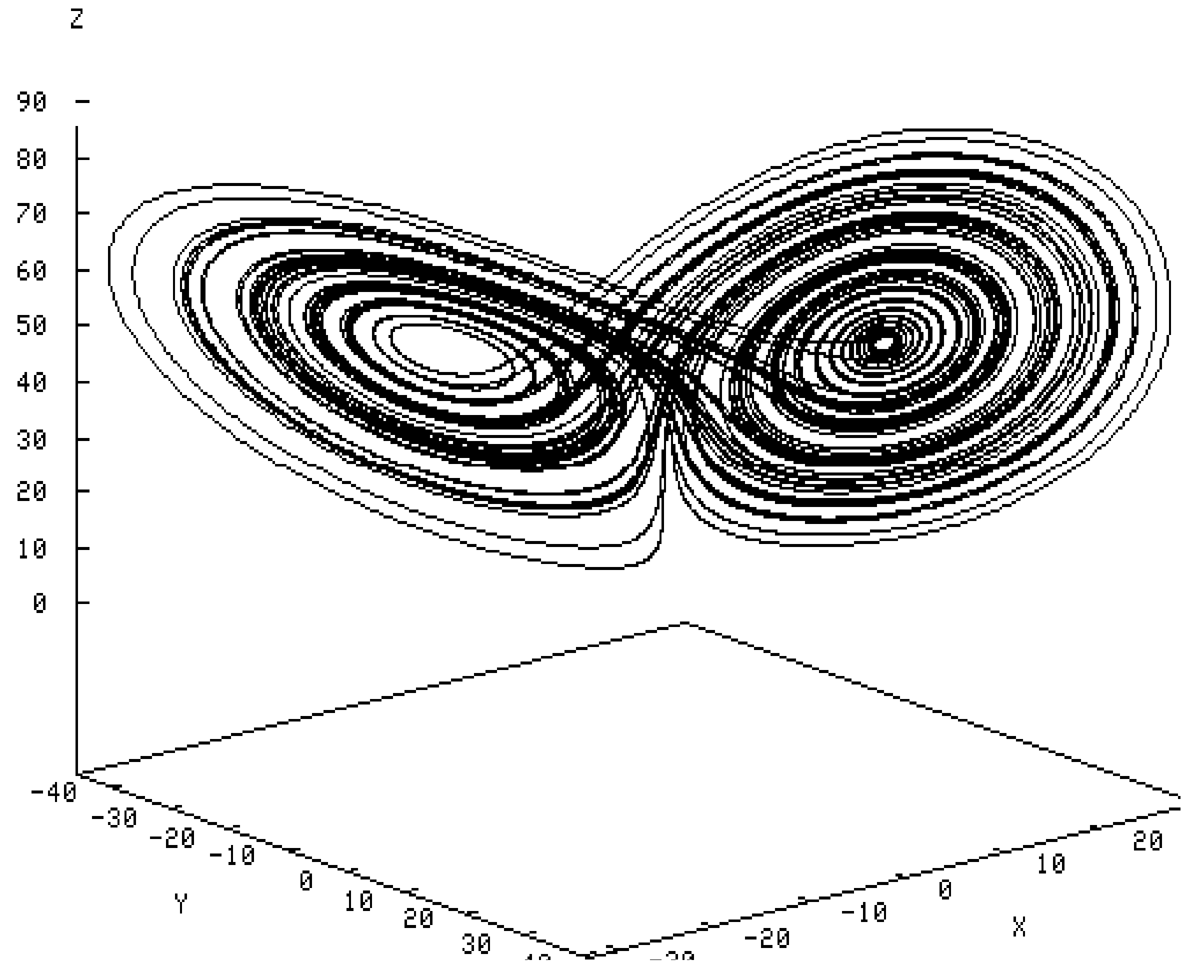


Lorenz recommença son expérience en prenant une situation initiale très voisine de $x(0) = 5$, $y(0) = 5$ et $z(0) = 5$. Il se doutait de ce qui allait arriver. Même si les points de départ étaient très proches, la seconde trajectoire divergea de plus en plus de la première, mais, à la surprise de Lorenz, elle alla elle aussi s'enrouler autour des deux boucles. Elle aussi semblait évoluer de façon aléatoire : elle pouvait effectuer plusieurs tours sur une « aile » du papillon, puis basculer sans prévenir vers l'autre et ainsi de suite. Lorenz eût beau répéter son expérience un grand nombre de fois, il obtenait toujours le même résultat. Quel que soit le point de départ, le système

semblait irrésistiblement attiré par les deux boucles des ailes du papillon, autour desquelles il tournait et retournait, apparemment au hasard, mais sans jamais couper sa trajectoire....

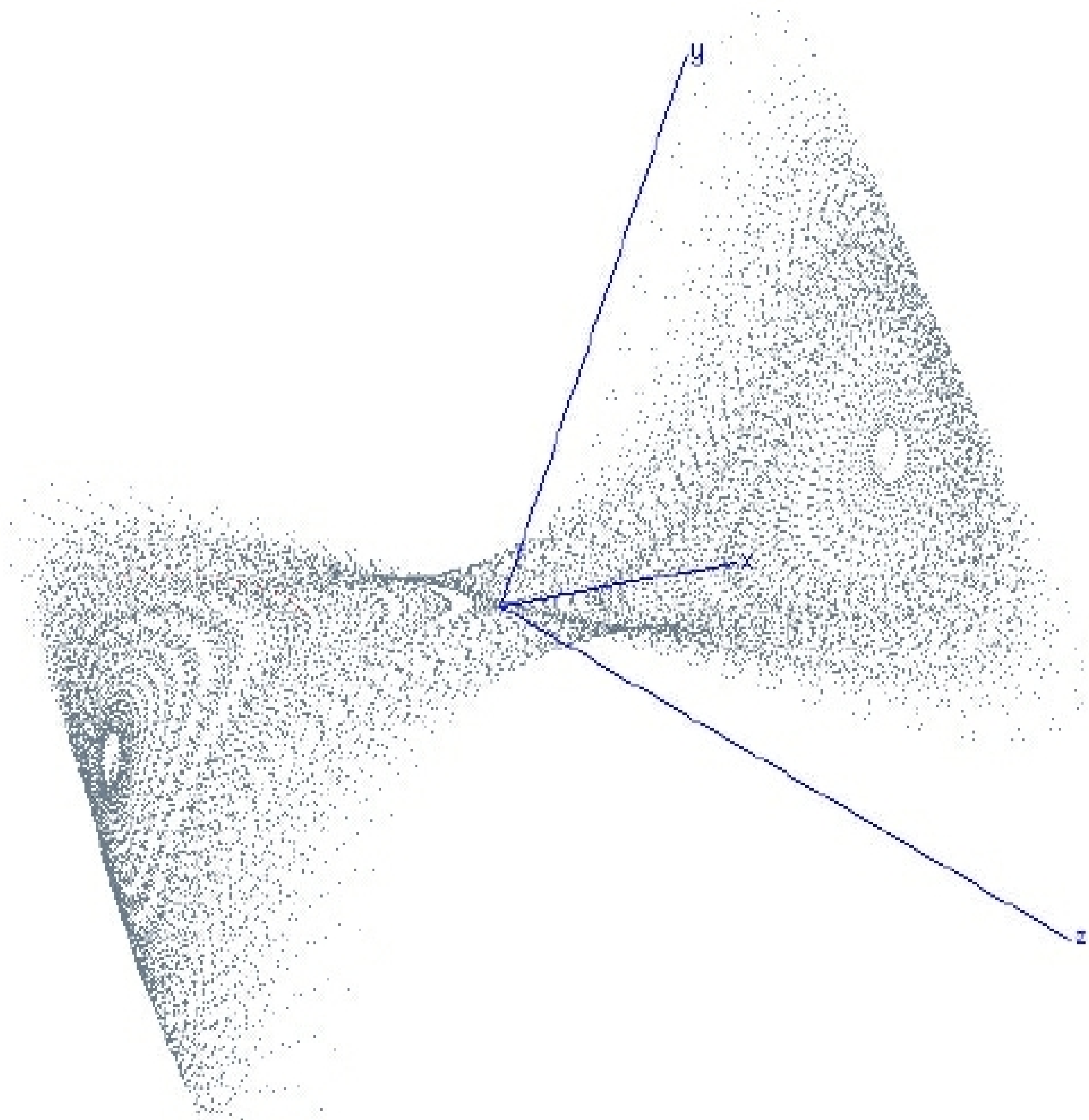
Le physicien David Ruelle qualifia plus tard cette figure « d'attracteur étrange ».

Et pour être étrange, elle l'était. Les trajectoires ne se coupaient jamais et semblaient évoluer au hasard, nous l'avons vu. Mais en plus les boucles semblaient s'empiler sur des plans dont le nombre tendait vers l'infini et « l'épaisseur » vers zéro ! De plus quelle que soit l'échelle à laquelle on examinait cet attracteur, le motif semblait toujours le même ! Quelques années plus tard, Mandelbrot allait découvrir la géométrie fractale et l'attracteur de Lorenz était justement une figure fractale ! Les figures fractales possèdent une dimension fractionnaire et la dimension de l'attracteur de Lorenz est comprise entre deux et trois. Cela signifie que cet attracteur est un « objet » qui est un peu plus qu'une surface mais pas tout à fait un volume. Ci-dessous, des attracteurs de Lorenz vus sous d'autres angles (et réalisés par des ordinateurs beaucoup plus puissants que ceux des années soixante).



Nous pouvons, au passage nous demander comment des trajectoires qui partant de conditions initiales très proches vont quand même diverger exponentiellement, restent néanmoins sur le même attracteur. C'est que les systèmes météorologiques, donc les solutions du système de Lorenz, doivent rester dans une certaine « fourchette ». Il ne fera jamais +50 C au Pôle Nord. L'attracteur doit donc rester dans une petite partie de l'espace des phases. Si vous roulez en bicyclette sur un circuit de F-1, la distance parcourue entre votre bicyclette et une Ferrari croîtra très rapidement et indéfiniment. Mais la distance réelle ne dépassera jamais la moitié de la longueur de ce circuit. On explique ce phénomène par les principes de « l'étirement » et du « repliement » qui sont devenus une caractéristique des attracteurs étranges. Prenons l'image, classique, du pâtissier qui étire et brasse sa pâte. Initialement, prenons deux points très proches dans la pâte. Un premier étirement les sépare, mais le premier repliement semblera les rapprocher. Chaque étirement les séparera davantage, même si chaque repliement paraîtra les rapprocher à nouveau. Après vingt opérations « étirement repliement », ce qui est un minimum pour obtenir de la pâte feuilletée, celle-ci est composée d'un million de « feuilles », chacune infiniment mince, bien entendu. Vous imaginez la

distance théorique séparant nos deux points initiaux, chacun sur sa feuille coincée parmi un million d'autres feuilles. Si les points initiaux avaient été de petites taches, de colorant par exemple, il y a longtemps que ce colorant aurait imprégné l'ensemble de la pâte.



Les systèmes parfaitement déterministes sont représentés dans l'espace des phases par des trajectoires précises sur lesquels ces systèmes se situent et évoluent sans les quitter.
Les systèmes aléatoires évoluent au hasard dans tout l'espace.
Les systèmes chaotiques, eux, ont un comportement infiniment complexe. Ils sont irrésistiblement attirés par une figure géométrique de structure également infiniment complexe sur laquelle ils errent au hasard, mais sans jamais la quitter, ni repasser deux

fois par le même point! Les attracteurs étranges (on en a découvert bien d'autres) semblent inclure à la fois des lois déterministes et des lois aléatoires. Avec la théorie du chaos, la science est entrée dans le domaine de la complexité !

D'une certaine façon, elle est aussi entrée dans le domaine du rêve et de la poésie. Quand le mathématicien contemple le phénomène irrésistiblement attiré par une figure infiniment complexe, où il erre au hasard, toujours proche et toujours loin, sans jamais la rejoindre ni la quitter, l'attracteur étrange devient pour lui un rêve familier. Comment ne pas penser au rêve du poète contemplant ses muses :

> *Je fais souvent ce rêve étrange et pénétrant*
> *D'une femme inconnue, et que j'aime, et qui m'aime,*
> *Et qui n'est, chaque fois, ni tout à fait la même*
> *Ni tout à fait une autre, et m'aime et me comprend.*

Nous terminerons cette section en citant le résumé qu'avait fait Lorenz dans son fameux article de 1963, intitulé « Deterministic non periodic flow » et publié dans le numéro 20 la revue Journal of Atmospheric Sciences, pages 130-141, qui allait marquer la naissance officielle de la théorie du chaos.

> Des systèmes finis d'équations non linéaires déterministes ordinaires peuvent êtres conçus pour représenter un écoulement hydrodynamique dissipatif forcé. Les solutions de ces équations peuvent êtres identifiés par des trajectoires dans un espace des phases. Pour les systèmes ayant des solutions limitées, on trouve que les solutions non périodiques sont habituellement stables par rapport à de petites modifications, de sorte que des états initiaux légèrement différents peuvent évoluer vers des états considérablement différents. On peut montrer que les systèmes ayant des solutions limitées possèdent des solutions numériques...
> Un système représentant une convection cellulaire est résolu numériquement. On s'aperçoit que les solutions sont instables, et presque toutes sont non périodiques.
> La possibilité de faire des prédictions météorologiques à très long terme est examinée à la lumière de ces résultats.
> Edward Lorenz

Un détail pour terminer. Si Lorenz a découvert les propriétés chaotiques de son modèle en 1961, sa communication ne parût que deux années plus tard, en 1963. C'est cet article, paru dans la revue spécialisée des météorologistes américains, que tout le monde cite aujourd'hui. Or cet article est passé totalement inaperçu. Ce qui a rendu Lorenz célèbre c'est une conférence qu'il donna en 1972, soit près de dix ans plus tard devant le grand public du congrès de l'Association américaine pour l'avancement des sciences. Cette conférence « grand public » était intitulée : « Prédictibilité : le

battement des ailes d'un papillon au Brésil peut-il déclencher une tornade au Texas ? »

En terme de marketing, ce titre était plus alléchant que « Deterministic non periodic flow ». Et la suite l'a prouvé. Quant au terme « chaos », il a été proposé par le mathématicien Yorke, deux ans plus tard, en 1975.

L'enjeu : déterminisme ou hasard ?

Une vision déterministe du monde consiste à penser que les phénomènes qui s'y produisent se déroulent inéluctablement selon des lois, divines ou naturelles, que l'on peut connaître ou non. Le hasard n'existe pas réellement dans un monde déterministe. Dans Invitation à la philosophie des sciences, Bruno Jarrosson décrit le déterminisme de la façon suivante :

1. Principe scientifique selon lequel tout phénomène est la conséquence nécessaire de phénomènes antérieurs ou simultanés ;
2. Doctrine philosophique selon laquelle tout, dans l'Univers, est le résultat nécessaire des conditions antérieures.

Ce que nous appelons le hasard correspond ou bien à des phénomènes que nous ne sommes pas encore capables de calculer, ou alors à un caprice de la volonté divine. La question du déterminisme soulève tout le problème du libre-arbitre. Dans le cadre de la religion, si le monde et nous-mêmes avons été créés par un Dieu omniscient et omnipotent, qui connaissait le futur et donc ce qui allait arriver à tout ce qu'il créait, il s'agit de savoir la marge de liberté qui nous reste. Dieu ayant prévu ce qui devait nous arriver, que nous reste-il à décider ? Cela occasionna d'innombrables débats théologiques, passionnés et brûlants, au sens littéral du terme, entre ceux qui pensaient que dans son infinie bonté Dieu avait créé le mal et le péché pour voir si on y succomberait et ceux qui pensaient que de toute façon Dieu avait tout prévu, ceux qui iraient au ciel et ceux qui iraient en enfer et qu'il n'y avait qu'à s'en remettre à son infinie bonté.

L'importance accordée au déterminisme correspond à l'aspiration à comprendre le monde qui nous entoure, pour pouvoir prévoir, si possible, ce qui peut nous arriver. En fait cette aspiration est vieille comme la civilisation. Au début de la plupart des civilisations, les hommes et les femmes inventèrent des mythes puis des religions pour leur donner une explication du monde et une idée de leur destin. Ils recherchaient un ordre à travers le désordre apparent des choses. Il y a plus de deux mille ans, les Grecs furent les premiers à chercher des explications davantage orientées vers le raisonnement. Puis ce fut le règne des religions pour qui tout s'expliquait par la volonté d'un Créateur et pour qui toutes les vérités étaient révélées dans des Livres Saints et il y avait les prêtres pour bien expliquer ce qu'il fallait faire pour que l'avenir soit radieux, sur terre comme au ciel. L'avenir appartenait à Dieu, certes, mais il avait délégué ses pouvoirs de prédiction à son Église ce qui lui conférait un pouvoir bien réel sur les gens.

À partir du XVe siècle, certains savants remirent en doute les vérités enseignées par les Églises, car elles ne correspondaient pas à ce qu'ils observaient, particulièrement dans le domaine du ciel. Dieu ayant créé l'Homme à son image, il fallait bien que celui-ci fut au centre de l'Univers, les théologiens n'imaginaient pas que dans son infinie bonté Dieu avait créé en plus une infinité de Mondes à son image. Cela aurait impliqué une infinité d'Églises et les évèques tenaient à ce qu'il y en ait une seule, la leur. Cette remise en cause de l'autorité de l'Église sur la question de savoir qui était au centre de l'univers, qui marqua aussi la naissance de la science occidentale, connut des moments forts avec Galilée et Newton.

Galilée affirma que ce n'était pas l'Univers qui tournait autour de la Terre, mais la Terre qui tournait autour du Soleil. La Terre redevenait une planète comme les autres, ce qui ipso facto risquait de ramener le Dieu de tout l'Univers à celui d'une simple planète. D'où le procès que l'Église intenta à Galilée. Menacé d'être brûlé vif, il dut proclamer qu'il s'était trompé et se taire ensuite. L'opposition de l'Église aux idées de Galilée était si profonde que ce n'est qu'en 1972 qu'elle reconnut que le procès avait été truqué…

Plus important encore que sa découverte du mouvement de la Terre autour du Soleil, Galilée proposa surtout une démarche pour comprendre le monde qui était aux antipodes de celle que l'Église avait imposée depuis plus de mille ans. L'Église affirmait que tout était expliqué dans la Bible et que ce qui n'y était pas relevait de la volonté divine qui n'avait de compte à rendre à personne. Galilée, lui, proposait que pour comprendre un phénomène, par exemple le mouvement de la Terre, le relief de la Lune ou la chute des corps, il y avait mieux à faire que d'aller fouiller la Bible : il suffisait d'observer ce phénomène et de le traduire en langage mathématique pour le comprendre et, éventuellement le reproduire et le prévoir. La méthode proposée par Galilée présentait un risque mortel pour les religions : si les phénomènes qui nous entourent sont compréhensibles, sans passer par la Bible, et si, une fois compris on peut en prévoir le déroulement, alors l'avenir commence à devenir prévisible sans avoir besoin de passer par Dieu.

L'exemple le plus célèbre est celui de la chute des corps. Avant Galilée, le dogme religieux repris d'Aristote et revu par St-Thomas affirmait que si un corps tombait, c'est que sa place était sur le sol ! En observant et en mesurant le mouvement de billes sur une planche inclinée, Galilée affirma, à peu près, « accélération = constante ».

D'où son texte fameux :

> La philosophie est écrite dans ce très grand livre qui est continuellement ouvert devant nos yeux (je veux dire l'Univers), mais il ne peut être compris à moins que d'abord on en apprenne le langage, et que l'on connaisse les caractères dans lesquels il est écrit. Il est écrit en langage mathématique, et les caractères sont des triangles, cercles et autres figures géométriques
>
> Galilée Saggiatore 1623

C'est là l'origine de la démarche scientifique, c'est là l'origine de la science occidentale moderne.

Newton, enfin !

Après Galilée, ce fut Newton. En découvrant le calcul différentiel et les lois de la gravitation, il allait reprendre l'œuvre de Galilée et assurer définitivement le développement de la science classique. En effet, le calcul différentiel et les lois de la gravitation allaient permettre d'expliquer et de prévoir les phénomènes astronomiques comme le mouvement des planètes, des comètes et des éclipses. Les explications des phénomènes qui nous entourent ne reposaient pas sur la volonté arbitraire d'un Dieu, mais sur des équations qu'il suffisait de résoudre. Une loi unique, celle de la gravitation, expliquait à elle seule une multitude de phénomènes différents. Et ça marchait. Le monde se simplifiait et devenait compréhensible. L'univers semblait être une horloge. Cette nouvelle science paraissait dominer la notion même du temps : avec quelques calculs, on pouvait dater les éclipses et les passages de comètes observées dans le passé et l'on pouvait donc prévoir l'avenir sur le plan astronomique. Puis après avoir expliqué le ciel, qui occupait une place essentielle tant dans les religions que dans la compréhension du monde, la science commença à descendre sur terre. Elle se mit à expliquer le mouvement des marées, la propagation de la chaleur, du son, etc. La méthode était, en gros, toujours la même : on observait le phénomène, on le mettait sous forme d'équations, différentielles la plupart du temps, qu'il ne restait plus qu'à résoudre. Une fois la solution obtenue, il suffisait de donner différentes valeurs, positives ou négatives, à la variable *t*, le temps, pour prévoir l'avenir ou remonter dans le passé. La vision du monde était plus déterministe que jamais. La différence c'est que la connaissance de notre avenir ne passait plus par les caprices d'un Dieu avec qui la communication était difficile, mais par les solutions d'équations différentielles qui n'étaient pas toujours simples, il faut bien le reconnaître.

Dieu n'était pas éliminé pour autant, Voltaire disait que « si le monde est une horloge, il a bien fallu qu'il y ait eu un horloger pour la créer ». Plus religieux, Newton concédait même que Dieu avait créé les lois physiques et pouvait à la limite intervenir de temps en temps pour rajuster quelques paramètres, mais que ses équations pouvaient très bien fonctionner sans lui. En fait le XVIIIe siècle fut celui du développement de la science. Comme les phénomènes qui avaient tant intrigué les générations antérieures semblaient s'expliquer par des équations, il était raisonnable de penser que ce serait aussi le cas des phénomènes, assez nombreux, dont on n'avait pas encore la solution. Ce n'était qu'une question de temps. Après des millénaires de mythes et de discours religieux, les équations permettaient enfin de prévoir l'avenir. L'avenir était plus prévisible que jamais.

Le déterminisme de Laplace

Pour les savants de cette époque, en se fiant aux résultats obtenus, le monde était donc un monde « déterministe ». Laplace, marquis et mathématicien respecté, traduisit bien l'esprit d'alors dans le célèbre passage où il affirme que connaître l'avenir et le passé, ce n'est qu'une question de calculs :

> L'état présent du système de la Nature est évidemment une suite de ce qu'il était au moment précédent, et si nous concevons une intelligence qui, pour un instant donné, embrasse tous les rapports des êtres de cet Univers, elle pourra déterminer pour un temps quelconque pris dans le passé ou dans l'avenir la position respective, les mouvements et, plus généralement, les affections de tous ces êtres.
>
> Laplace *Essai philosophique sur les probabilités*. 1778

Cet extrait, célèbre, présente Laplace comme un « déterministe » inconditionnel. En fait, ce n'est pas tout à fait le cas. Laplace était convaincu qu'il était impossible que cette intelligence « puisse embrasser tous les rapports des êtres de cet univers ». D'ailleurs cet extrait provient de son essai sur les probabilités et, pour Laplace, les probabilités n'étaient qu'un moyen de raisonner dans des situations d'ignorance partielle, comme l'écrit Alan Sokal.
À la même époque, Laplace réalisa un traité de Mécanique céleste qui aujourd'hui fait encore autorité. Les méthodes de calcul qu'il avait développées permettaient de déterminer avec une très bonne précision, les trajectoires des planètes du système solaire. Lorsqu'il présenta le résultat de ce travail à Napoléon, lui-même féru de mathématiques, mais au niveau amateur, le dictateur s'étonna : « Mon bon ami, j'ai lu tout votre livre, mais je n'ai pas rencontré la moindre trace de Dieu dans votre ciel ». Ce n'est pas que Napoléon croyait en Dieu, mais il savait que, pour la stabilité de l'État, le peuple, lui, devait y croire. Ce à quoi le divin marquis répondit : « Sire, je n'ai pas eu besoin de cette hypothèse ».

Cela traduit bien l'évolution de la place des sciences dans le monde occidental au cours du XVIIIe siècle. Comme le déclara un autre savant : « La religion doit se limiter à dire comment aller au ciel. Nous, nous expliquerons comment il fonctionne ». Rousseau ajoutait : « L'astronomie est née de la superstition ». Pour bien des philosophes et savants de cette époque, la science avait succédé à Dieu, avec les mêmes capacités de prévision, mais qui étaient, elles, compréhensibles, calculables et vérifiables.

Mais sur un point central, prêtres et savants avaient le même point de vue, le point de vue déterministe.

Laplace, et les autres savants étaient si convaincus de la puissance de cette science, qu'ils évaluaient qu'il n'y avait plus grand chose à découvrir, seulement quelques calculs à effectuer. Voici comment Laplace prévoyait le développement de la science :

« Les progrès de l'astronomie future dépendent de trois choses, la mesure du temps, celle des angles et la perfection des instruments d'optique. Les deux premières ne laissant malheureusement presque rien à désirer, la troisième représente toutes nos espérances ».

Lagrange, autre mathématicien célèbre de cette époque, était bien triste :

« Comme il n'y a qu'un seul univers à expliquer, personne ne peut refaire ce qu'a fait Newton, le plus heureux des mortels ».

Pourtant, Laplace, grisé par les succès ininterrompus de la physique newtonienne et du calcul différentiel et intégral, aurait dû y penser deux fois. Il avait lui-même reconnu qu'il avait eu quelques difficultés à appliquer les lois de Newton lorsque trois planètes s'influençaient mutuellement et qu'il avait dû « simplifier » un peu, beaucoup, les équations récalcitrantes. Mais comme il était convaincu que de petites approximations n'engendrent que de petites erreurs, personne ne s'y attarda. Le vers était dans le fruit.

Le vers, c'était le hasard, l'imprédictibilité.

Un peu plus tard, au début du XIXe siècle, les mathématiciens et physiciens s'aperçurent que l'étude du mouvement des gaz était bien plus compliquée que celui des planètes. Il était impensable de calculer les trajectoires de chaque molécule. On dû avoir recours au calcul des probabilités et aux statistiques, que Laplace lui-même avait bien développé, pour expliquer le comportement non pas d'une molécule, mais d'un ensemble de molécules. La physique statistique, dont Maxwell et Boltzmann étaient les pères, venait de naître et fut certainement une des grandes découvertes du siècle dernier. Mais cela ne remettait pas en cause les lois de Newton. Les savants étaient convaincus que le mouvement de chaque molécule était calculable, mais que cela aurait demandé un effort démesuré alors que les lois statistiques donnaient un résultat vérifiable beaucoup plus facilement.

Par ailleurs les lois de Newton continuaient à accumuler les succès. Nous avons vu comment Le Verrier découvrit la planète Neptune uniquement en appliquant les lois de Newton aux déviations que l'on observait pour certaines planètes voisines. Ces lois demandaient de longs calculs. Ainsi, vers 1850, Charles Delaunay passa vingt ans de sa vie pour calculer aussi exactement que possible la trajectoire de la lune soumise à la double influence de la Terre et du Soleil. Ses calculs furent publiés sous la forme d'un livre très épais. Évidemment aucun de ses collègues ne voulût consacrer une autre vingtaine d'années pour vérifier ces calculs. Ian Stewart, dans *La nature et les nombres*, précise que ce n'est que vers 1970, grâce aux premiers logiciels de calcul symboliques, que les calculs de Delaunay furent vérifiés en une vingtaine… d'heures ! On ne trouva que trois erreurs dont aucune n'était sérieuse. Trois erreurs en vingt ans de calcul, ce n'est pas si mal ! Notez que si Delaunay avait mit vingt ans pour calculer la trajectoire de la lune, c'est qu'il tenait compte de l'attraction entre *trois* corps : la

lune, le soleil et la Terre. Les prédécesseurs de Delaunay limitaient l'application de la Loi de Newton à *deux* corps.

Poincaré et le chaos dans le système solaire

Le premier grain de sable dans l'horloge newtonienne, ce fut la faute du roi de Suède. En 1889, le roi Oscar proposa aux mathématiciens du monde entier un concours : celui qui résoudrait le problème du comportement des trois planètes, problème sur lequel avait buté Laplace, gagnerait son Grand Prix International. Ce problème se résumait de la façon suivante : « Le système solaire est-il stable ? ».
Henri Poincaré décida de relever le défi. C'était un personnage hors du commun, un des plus grands mathématiciens de notre époque et certainement le plus universel. Il fit des découvertes dans toutes les branches des mathématiques. Vigoureusement anti-clérical et anti-militariste, ses distractions étaient aussi légendaires que sa capacité de travail. Au cours de sa vie, assez brève, il écrivit plusieurs centaines de livres, non seulement en mathématiques mais aussi en physique et en philosophie. Il se mit donc au travail. Il découvrit assez vite que les solutions des équations de Newton n'étaient pas intégrables dans le cas de trois planètes. Il eut alors l'idée géniale d'aborder le problème d'une tout autre façon, par la géométrie. Il inventa le concept d'espace des phases, que nous avons rencontré. Puis, pour faire bonne mesure, il inventa ensuite une nouvelle branche des mathématiques, la topologie, toujours pour résoudre le problème des trois corps.
Il serait un peu long et assez difficile de résumer les raisonnements topologiques de Poincaré, mais sa conclusion était claire : les trajectoires de trois planètes s'influençant étaient imprévisibles. Le système solaire ne fonctionnait pas comme une horloge. Pour la première fois, les lois de Newton montraient leurs limites, sur ce point particulier, l'avenir redevenait imprévisible. Des calculs plus récents ont confirmé que le système solaire était réellement instable, chaotique dirions-nous. Les perturbations sont multipliées par 10^{10}, soit dix milliards, en cent millions d'années. Une fluctuation de 1 cm sur la position initiale de la terre peut aboutir après cent millions d'années à un déplacement d'un million de km. Rassurez-vous : les dix premiers millions d'années, le déplacement est minime.
Voici comment Poincaré vulgarisa sa découverte :

> Une cause très petite qui nous échappe détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de l'Univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation initiale qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois; mais il n'en est pas toujours ainsi, il

> peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux : une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit.
> Poincaré *Science et méthode* 1903

Ne possédant pas d'ordinateur, Poincaré ne put explorer et simuler le comportement des trois planètes dans leur espace des phases, comme le fit plus tard Lorenz. Il aurait découvert les attracteurs étranges et le chaos. Dans ce même livre, un classique de la philosophie des sciences, Poincaré prévoyait assez exactement la découverte de Lorenz :

> Pourquoi les météorologistes ont-ils tant de peine à prévoir le temps avec quelque certitude ? Pourquoi les chutes de pluie, les tempêtes elles-mêmes nous semblent-elles arriver au hasard, de sorte que bien des gens trouvent tout naturel de prier pour avoir la pluie ou le beau temps, alors qu'ils trouveraient ridicule de demander une éclipse par une prière ? Nous voyons que les grandes perturbations se produisent généralement dans les régions où l'atmosphère est en équilibre instable. Les météorologues voient bien que cet équilibre est instable, qu'un cyclone va naître quelque part ; mais où ? Ils sont hors d'état de le dire ; un dixième de degré en plus ou en moins en un point quelconque, le cyclone éclate ici et non pas là, il étend ses ravages sur des contrées qu'il aurait épargnées. Si l'on avait connu ce dixième de degré, on aurait pu le savoir d'avance, mais les observations n'étaient ni assez serrées ni assez précises, et c'est pour cela que tout semble dû à l'intervention du hasard.

Personne à l'époque ne saisit l'importance de la découverte de Poincaré : il découvrait si souvent tant de choses ! D'ailleurs, dans ces années-là, il découvrit une formule qui allait rendre Einstein célèbre : $E = mc^2$

Mécanique quantique et incertitude

Si Poincaré avait pressenti les failles de la mécanique newtonienne, ce fut la mécanique quantique qui remit réellement en cause le déterminisme sur lequel était fondée la science classique. Dans les années vingt, le physicien allemand Heisenberg prouva qu'il était impossible de connaître à la fois la position et la vitesse d'un électron. C'est ce résultat, appelé « principe d'incertitude », qui remit en cause les bases de la physique déterministe classique. Ce principe heurtait profondément Einstein, qui, déterministe convaincu, ne pouvait accepter que des phénomènes puissent être réellement aléatoires. Il résumait sa pensée par une phrase célèbre : « Dieu ne joue pas aux dés ». Dans la ligne, sur ce plan au moins, des physiciens et mathématiciens du XVIIe et XVIIIe siècle, Einstein était persuadé que le monde était régi par des lois déterministes. Pour lui le monde était ordonné et ne pouvait être soumis au hasard. Voici comment il résumait sa position :

> Reconnaissons à la base de tout travail scientifique d'une certaine envergure une conviction bien comparable au sentiment religieux puisqu'elle accepte un monde fondé en raison, un monde intelligible. Cette conviction, liée à un sentiment profond d'une raison supérieure se dévoilant dans le monde de l'expérience, traduit pour moi l'idée de Dieu.
>
> Einstein *Comment je vois le monde* Flammarion 1979 p 231

Au passage Einstein reconnaît clairement qu'il y a une certaine continuité entre la pensée religieuse voulant que la cohérence du monde soit voulue par Dieu et la pensée des philosophes et savants athées du XVIIIe pour qui la cohérence du monde était voulue par la science. Malgré tous ses efforts, il ne réussit jamais à prouver que le principe d'incertitude était faux.

Il y avait une contradiction entre les principes de la physique microscopique basés sur la mécanique quantique où le hasard semblait jouer un rôle majeur et les principes de la physique macroscopique basés sur les principes déterministes de la mécanique newtonienne.

Turbulence

Entre, environ, 1900 et 1960, le débat se faisait entre les théories de type déterministe comme la mécanique classique ou la relativité, et les théories de type probabiliste comme la mécanique quantique, chacune finissant par s'imposer dans son domaine. Les découvertes de Poincaré sur « l'incertitude » des lois de la gravitation dans le cas de trois planètes étaient passée inaperçues. Poincaré était trop en avance sur son temps. Dans un tout autre domaine, celui des turbulences dans l'écoulement des fluides, des savants découvraient que là aussi le hasard, ou plutôt la complexité apparaissait derrières les lois apparemment simples et déterministes de la mécanique classique. Ces travaux furent eux aussi totalement ignorés mais pour une tout autre raison : ces savants étaient russes. Il n'y avait à cette époque à peu près aucun lien entre les savants russes et occidentaux, en dehors de l'espionnage. Dès le début de la Révolution, en 1917, le régime communiste encouragea le développement des sciences pour des raisons idéologiques, ce régime se proclamant « matérialiste ». En grande partie pour les mêmes raisons idéologiques, les mathématiques et la physique appliquée furent particulièrement encouragées. Les physiciens et les mathématiciens étant encouragés à travailler sur une image « réaliste » du monde, une série de laboratoires de recherche se développèrent autour de sujets comme la physique du solide autour de Ioffé à Leningrad, la physique théorique autour de Landau à Karkhov et surtout l'équipe de Mendelshtam à Moscou qui travaillait sur les oscillations non linéaires. Il faut mentionner aussi le mathématicien Kolmogorov qui théorisa le calcul des probabilités. Dans les pays occidentaux, les physiciens se déchiraient autour de la mécanique quantique et du concept d'incertitude qu'elle impliquait. Pour le régime communiste, il s'agissait là d'une question « idéaliste ». Les physiciens et les mathématiciens soviétiques furent encouragés à travailler sur une vision déterministe et matérialiste du monde, suivant le chemin ouvert par Laplace. Leurs domaines d'étude furent les probabilités, la turbulence et la dynamique non linéaire.

La science soviétique se développa sans aucun lien avec la science occidentale, guerre froide oblige. Il est maintenant admis que dans le domaine de la dynamique non linéaire, c'est-à-dire les phénomènes chaotiques, les savants soviétiques avaient une avance considérable sur leurs collègues occidentaux. Kolmogorov apparaît aujourd'hui comme l'un des grands mathématiciens de ce siècle. Il a publié trois livres majeurs. Selon le mathématicien Thikomirov, le premier, *Mathématiques et mécanique*, est consacré aux phénomènes déterministes, le royaume de l'ordre. Le second, *Théorie des probabilités et statistiques mathématiques* porte sur les phénomènes aléatoires, le royaume du chaos, tandis que le thème du troisième, *Théorie de l'information et théories des algorithmes*, c'est que les deux premiers royaumes n'ont pas de frontière naturelle. On s'aperçoit aujourd'hui que les résultats majeurs de la théorie du chaos étaient déjà obtenus en URSS dans les années trente et quarante. À une nuance près : les soviétiques n'ont jamais eu d'industrie informatique digne de ce nom, et cette lacune majeure les a quelque peu bloqués.

En dehors de ses travaux sur les probabilités, Kolmogorov, qui était particulièrement original, avait émis une théorie célèbre sur les grands mathématiciens : les grands mathématiciens ont besoin d'un tel degré d'abstraction qu'ils lui ont sacrifié leur

développement dans les autres domaines notamment social et affectif. Pour Kolmogorov l'âge mental et affectif d'un mathématicien de top-niveau est d'environ douze ans et il s'incluait dans cette catégorie.
Les travaux des différentes écoles russes sur les probabilités, la mécanique non-linéaire et la turbulence ont profondément influencé les quelques savants occidentaux qui se tenaient au courant. Parmi ceux-ci, il faut mentionner le physicien belge David Ruelle qui dès la fin des années soixante avait étudié en profondeur les phénomènes chaotiques à travers la turbulence. Avec le mathématicien hollandais Takens, il a établi des résultats fondamentaux sur ce qui allait devenir la théorie du chaos. Si Ruelle avait été américain, c'est à ses turbulences que le chaos aurait été identifié plutôt qu'au papillon de Lorenz.

La querelle du déterminisme

Depuis la fin des années 70, le chaos a envahi la plupart des sciences, les dures comme les molles. Partout où des phénomènes se traduisaient par des équations déterministes mais non linéaires, qui étaient très sensibles aux conditions initiales, des phénomènes chaotiques étaient susceptibles de se produire. C'est le cas en physique, mais aussi en biologie (la démographie, les épidémies, le rythme cardiaque, etc.), la chimie, l'économie, etc. Cette expansion de la théorie du chaos s'est accompagnée du développement de l'informatique et des nouvelles approches du travail scientifique : modélisation, simulations, etc. Comme toutes les nouvelles théories, la théorie du chaos a suscité et suscite encore bien des controverses. En dehors des diverses controverses sur les résultats obtenus et leur interprétation, le débat porte surtout sur la place du hasard dans le monde qui nous entoure. La science pourra-t-elle l'expliquer toujours davantage, ou la compréhension du monde sera-t-elle inaccessible car reposant sur le hasard ? En fait, pour les scientifiques, il s'agit de définir le niveau de complexité des phénomènes qu'ils étudient.
En simplifiant beaucoup, la controverse porte entre ceux qui pensent que le hasard est un élément incontournable de la nature et ceux qui pensent que le hasard est lui-même objet de science et que la question n'est pas le hasard comme barrière à la connaissance mais plutôt la complexité. On retrouve la controverse sur la place du hasard qui avait divisé les scientifiques lors de la découverte de la mécanique quantique.
Durant les années 80, la polémique a parfois été violente entre les deux courants de pensée. Ainsi le mathématicien René Thom, médaillé Fields et qui a découvert la théorie des catastrophes, s'est vigoureusement opposé au chimiste Ilya Prigogine. Pour Thom, tout travail scientifique se traduit nécessairement par des lois et ces lois ont nécessairement un aspect déterministe car autrement il ne s'agirait pas de lois à caractère scientifique. Prigogine est plus enclin à voir dans les phénomènes aléatoires une limite à la science. René Thom a publié un livre qui a eu un certain retentissement et au titre éloquent : *Halte au hasard, silence au bruit*. Dans sa première version, ce livre s'intitulait *Halte au hasard, silence au bruit et mort aux parasites* !

Cette controverse est bien présentée *dans La querelle du déterminisme, Philosophie de la science d'aujourd'hui*.
Nous espérons que les pages qui précèdent vous permettront de mieux pouvoir évaluer les arguments des uns et des autres.

Variations sur un thème à la mode

Papillon et ouragan

Le fameux papillon qui déclenche une tempête à l'autre bout du monde est une image qui a fait fortune et a été reprise par tous les auteurs qui traitent du chaos. Il est devenu un symbole du chaos, un peu comme la pomme de Newton est devenue le symbole de la gravité ou le chat de Schrödinger celui de la mécanique quantique. Comme disent les spécialistes en marketing, « c'est un hit ». Nicolas Witkowski s'est amusé à analyser la façon dont cette image a été reprise par les auteurs des quatre coins du monde qui ont écrit sur le chaos.

> Un papillon battant des ailes au Brésil peut déclencher une tornade au Texas. Qui ne connaît la célèbre métaphore utilisée par le météorologue Edward Lorenz pour rendre compte des limitations rencontrées par la prévision météorologique : une infime variation des conditions initiales de l'atmosphère terrestre suffit à faire passer, trois jours plus tard, de la pluie au beau temps... La littérature et le cinéma ont assuré, après la vulgarisation scientifique, le succès du papillon, dont aucun discours sur la fameuse théorie ne peut faire l'économie. Pourquoi le Brésil ? et pourquoi le Texas ? L'idée consiste évidemment à choisir un papillon lointain et exotique, le Brésil fera l'affaire, déchaînant une catastrophe météorologique dans un lieu familier, le Texas s'imposant logiquement… pour un américain ! Le journaliste américain James Gleick, dans sa *théorie du chaos*, met en scène un papillon pékinois provoquant une tempête à New-York, et le mathématicien chaotique de *Jurassic Park* lui emboîte le pas, tandis que dans *Havana* Robert Redford parle d'un ouragan dans les Caraïbes. De même dans la littérature anglaise, les papillons déclenchent invariablement des orages sur Londres. Un vulgarisateur français du chaos devrait donc situer son papillon au Brésil, en Chine ou, mieux, en Nouvelle Zélande, aux antipodes, et la catastrophe en France. Or l'analyse d'une cinquantaine « d'effets papillon » attrapés au vol montrent que les papillons français, dans leur grande majorité, déclenchent des cataclysmes aux Etats-Unis ou dans les Caraibes. Quelle injustice !Et quelle meilleure illustration de « l'americano centrisme » de notre culture scientifique. La référence imposée à l'origine américaine de la métaphore lui confère de toute évidence, une aura qui fait défaut aux véritables sources de la théorie du chaos, lesquelles se trouvent chez le mathématicien français Poincaré (« un dixième de degré en plus ou en moins en un point quelconque…un cyclone éclate ici et non pas là », 1908) et le russe Kolmogorov. À qui douterait de l'influence des modes et des lobbies sur

le marché de la science, le papillon de Lorenz, petit mythe moins innocent qu'il n'en a l'air, apporte, d'un seul coup d'aîle, une preuve irréfutable.
Nicolas Witkowski
Sciences et Avenir, juillet-août 1997

La mode et la science, l'affaire Sokal

La théorie du chaos est devenue dans les années 80 et 90 une théorie à la mode. Le nom et les papillons étranges y ont été pour quelque chose mais aussi tout ce que la façon dont cette théorie avait été présentée soulevait dans l'inconscient des gens.
Il y a d'abord la question de l'avenir : pourrons-nous, oui ou non, avoir une idée de ce qui nous attend ? Cette question, au cœur de la théorie du chaos, est également la question qui a intéressé, de tout temps, les hommes et les femmes.
Il y a aussi la question de la place de la science dans nos sociétés. Depuis Galilée, la science, avec ses méthodes et sa rigueur, a « tassé » les anciennes façons de comprendre le monde : mythiques, religieuses, intuitives, etc. Consciemment ou inconsciemment la théorie du chaos a donné à bien des gens qui se reconnaissaient dans ces anciennes façons l'occasion d'espérer une revanche. La science rigoureuse, quantitative, qui avait imposé sa loi depuis Galilée, frappait enfin un mur. C'était là l'occasion de réintroduire des approches plus « qualitatives », plus mystiques, qui avaient perdu le haut du pavé devant les réussites de la science classique.
Ces apparentes difficultés de la science classique, cette apparente réhabilitation des pseudos-sciences, correspondaient aussi aux nouvelles théories qui apparaissaient en physique et en mathématiques. En physique, le hasard apparaissait en mécanique quantique, tandis qu'en mathématique les efforts pour l'asseoir sur des bases rigoureuses, échouaient. C'était la crise des fondements. Pire, le théorème de Godel (1931) semblait démontrer que le concept même de « vérité » perdait son sens en mathématique. Arrive la théorie du chaos qui semble, vu de loin, réintroduire le hasard. De nombreux philosophes, sociologues, etc. qui avaient un compte à régler avec la science classique, en profitèrent pour reprendre hors contexte et sans trop les comprendre les concepts de « hasard », de « chaos », pour remettre en cause le principe même de la démarche scientifique. La décrivant comme trop rigide, démentie par ces nouvelles théories, ces philosophes prônaient le retour de l'intuitif, de l'idéalisme et du relativisme (les théories scientifiques sont des idéologies comme les autres, chacun a droit à sa vérité, etc). Ces philosophes regroupaient particulièrement quelques personnalités françaises qui eurent une certaine notoriété dans les années soixante : Lacan, Baudrillard, Deleuze et surtout Lyotard, le père de la théorie philosophique du post-modernisme.
Pour ridiculiser l'abus que ces philosophes faisaient de théories scientifiques pour leur faire dire n'importe quoi, un professeur de physique de l'université de New-York, Alan Sokal, monta un canular qui réussit au-delà de ses espérances.

Il envoya à une prestigieuse revue universitaire de sciences humaines de tendance « post-moderne » un article intitulé « Transgresser les frontières vers une herméneutique transformative de la gravitation quantique ». Dans un style ampoulé à l'image du titre, Sokal a aligné un nombre maximal d'erreurs, de contre-sens, de hasard et de chaos, par exemple la constante π dépendrait du lecteur. Mais il a pris soin d'utiliser le langage obscur en vogue chez les post-modernes et de citer les principaux auteurs de cette tendance. La prestigieuse revue universitaire n'a vu que du feu et a publié le texte de Sokal avec une présentation élogieuse. Celui-ci a ensuite eu beau jeu de dénoncer son propre canular, ridiculisant ainsi tous ceux qui n'avaient rien vu de toutes les erreurs grossières parsemant son texte. Plus tard, Sokal a récidivé en publiant un livre intitulé « Impostures intellectuelles ». Dans ce livre, il reprend une série de textes écrits par des philosophes et des sociologues célèbres et où ceux-ci reprennent à leur façon des théories scientifiques, la théorie du chaos étant particulièrement à l'honneur, pour leur faire dire un peu n'importe quoi. C'est à la fois édifiant et amusant. Nous citerons la conclusion de Sokal qui rappelle que tout ceci n'est pas un jeu innocent.

> À l'heure où la superstition, l'obscurantisme et le fanatisme nationaliste et religieux se porte à merveille, il est à tout le moins irresponsable de traiter avec légèreté ce qui, historiquement, a été le seul rempart contre cette folie, c'est-à-dire la vision rationnelle du monde. Favoriser l'obscurantisme n'est sans doute pas l'intention des auteurs post-modernes, mais c'est une conséquence inévitable de leur démarche.

En guise de synthèse

Comme conclusion, provisoire bien sûr, nous reprendrons celle d'Ivar Ekeland qui termine son livre, *Le chaos*, paru chez Flammarion dans la collection Dominos. Ivar Ekeland est professeur de mathématiques à l'Université de Paris-Dauphine où il est spécialisé dans l'étude des phénomènes dynamiques particulièrement ceux portant sur l'économie. Il a également publié de nombreux ouvrages de vulgarisation des mathématiques.

> .... L'impact majeur de la théorie du chaos est encore à venir; il ne se limitera pas aux mathématiques, mais se fera sentir sur l'ensemble de la science. Pour comprendre pourquoi, il faut avoir présente à l'esprit la structure des théories scientifiques, dans le domaine de la physique tout au moins. Elles se composent--ou se composaient jusqu'à présent, car nous allons voir que la théorie du chaos risque de changer cette structure-- de deux parties, en regard l'une de l'autre. D'un côté un système physique, de l'autre un modèle mathématique, et entre les deux une mystérieuse correspondance : l'état du système est décrit par la valeur de certaines variables du modèle, et la logique

interne du système contraint le système. Le prototype de toutes les théories physiques est la théorie newtonienne. D'un côté nous avons le système solaire, le Soleil au centre, et de tous les corps célestes, planètes astéroïdes, comètes, gravitant autour de lui. De l'autre nous avons des points dans l'espace euclidien à trois dimensions, et des équations qui déterminent leur mouvement. Entre les deux, un miracle permanent, qui fait que le mouvement mathématique de ces points abstraits dans l'espace abstrait coïncide avec le mouvement observé des corps célestes dans l'espace concret, et que l'on peut prédire la position des planètes en calculant la solution des équations de Newton. Ce miracle est devenu si habituel que nous n'y pensons plus, mais il n'en reste pas moins incompréhensible, tout au moins pour l'auteur de ces lignes.

Quoi qu'il en soit cette démarche de modélisation est à la base de toute la science moderne. On arrive en physique moderne à des modèles dont on ne sait plus s'il faut davantage en admirer la sophistication mathématique ou la puissance de prévision. Mais la biologie ou l'économie ont aussi développé des modèles, qui, bien que moins sophistiqués et moins puissants, n'en sont pas moins des étapes importantes dans le développement de la science. Bien entendu tous ces modèles sont aussi variés que les situations qu'ils recouvrent et que l'état des mathématiques le permet. On peut cependant les ranger en deux grandes catégories, stochastiques ou déterministes, suivant qu'ils font ou non appel au hasard.

Un modèle est stochastique si à un moment donné, il fait lancer des dés par quelqu'un et utilise le résultat obtenu. En physique moderne, on calcule des probabilités : probabilité pour un électron de passer d'une orbite atomique à une autre, probabilité pour un noyau de se désintégrer, probabilité pour le vide de donner naissance à un couple d'antiparticules. Quant à savoir si le phénomène se produira effectivement, si tel électron changera de niveau d'énergie, si tel noyau va se désintégrer ou si l'on verra apparaître à tel endroit un positron, on n'en sait rien; cela dépend d'un tirage au sort auquel le physicien ne participe pas. C'est le prototype du modèle stochastique, et cela choquait beaucoup Einstein, qui se demandait à juste titre qui lançait les dés. Il est vrai que toute la physique classique nous avait plutôt habitués aux modèles déterministes, ceux où personne ne lance les dés, et que la physique relativiste s'est sur ce point conformée à l'exemple newtonien. Dans un modèle déterministe, l'évolution du modèle est entièrement déterminée par son état actuel : si on sait résoudre les équations, on peut prédire les états futurs et reconstituer les états antérieurs.

Le premier effet de la théorie du chaos (disons tout de suite que c'est à mes yeux le moins important) est d'élargir la palette des modèles disponibles pour représenter des phénomènes irréguliers ou aléatoires. Jusqu'à présent, lorsque le physicien, le biologiste ou l'économiste rencontraient un phénomène de ce type, il en cherchait un modèle stochastique, dans l'idée qu'un modèle déterministe conduisait nécessairement à un comportement régulier et prédictible, en contradiction justement avec le système qu'il cherchait à modéliser. Si la théorie du chaos paraît tellement intéressante aux chercheurs de ces disciplines, c'est qu'elle leur ouvre une autre possibilité, celle de proposer un modèle

déterministe mais chaotique. On peut alors espérer rendre compte du système physique sans faire appel, comme dans les modèles stochastiques, à un *deus ex machina* lanceur de dés.

Donnons un exemple actuel. L'un des phénomènes de base de l'économie est l'existence de cycles d'activités, faisant alterner les périodes de récession et les périodes d'expansion. Ils sont plus ou moins prononcés (on se souvient encore de la grande récession de 1929), ils durent plus ou moins longtemps (l'Europe a connu après la Seconde Guerre mondiale trente ans d'expansion ininterrompue), mais ils sont toujours là. L'expérience prouve qu'ils ne sont guère prévisibles; on est même incapable de reconnaître si telle baisse d'activité est passagère ou si elle signale l'entrée en récession et le début d'un nouveau cycle. Ils ne sont pas non plus totalement aléatoires : les analyses historiques révèlent au contraire des enchaînements parfaitement logiques entre les anticipations des acteurs et leurs comportements, et montrent l'importance que peuvent avoir certaines politiques dans un sens comme dans l'autre. Sans conteste, l'un des principaux problèmes posés à la science économique est d'expliquer ces cycles. Faut-il en chercher les raisons dans le fonctionnement interne de l'économie? Faut-il les attribuer à des facteurs extérieurs à celle-ci, que ce soit l'incompétence des gouvernements ou le progrès industriel?

Jusqu'à présent, c'est le second type d'explication qui a été privilégié. En raison du caractère irrégulier des cycles, on a cherché à les représenter par des modèles stochastiques, c'est-à-dire qu'on a cherché à expliquer les cycles par des chocs extérieurs, de nature aléatoire, auxquels serait soumise l'économie. Un certain nombre de modèles, par exemple, font appel pour cela à l'innovation technologique, chaque nouvelle invention se traduisant par un saut qualitatif, un gain de productivité brutal qui se propagerait à travers toute l'économie (choc technologique). Mais la théorie du chaos ouvre de nouvelles possibilités d'explication, et l'on a assisté ces dernières années à une floraison de modèles déterministes reliant les cycles économiques aux anticipations des agents (consommateurs et producteurs), à l'alternance des générations, voire à la recherche d'un optimum social par un planificateur bénévole. Le point commun de tous ces modèles est de voir dans l'économie un système chaotique. Les cycles ne sont alors que des conséquences de cette hypothèse ; elle en a bien d'autres et je pense que nous n'avons pas fini de les explorer.

D'une manière générale, la théorie du chaos élargit considérablement les possibilités d'emploi des modèles déterministes. Jusqu'à présent leur utilisation semblait limitée à des systèmes complètement prévisibles, parfaitement transparents au regard du savant, qui pouvait pénétrer indifféremment le passé le plus reculé comme l'avenir le plus lointain. C'est la vision de Laplace qui, du simple fait que l'Univers était soumis à la loi de Newton, concluait que tout était déterminé dès à présent, et qu'une intelligence qui connaîtrait les positions et les vitesses exactes de chaque particule de l'Univers pourrait calculer tout le passé et tout l'avenir. Dans le grand livre de l'Univers, tout est écrit aujourd'hui, il suffit de savoir lire.

C’est de cette chape étouffante, de cet univers clos où il ne peut plus rien se passer, où il n’y a ni inconnu ni nouveau, que nous délivre la théorie du chaos. La vision qu’elle nous propose est toute différente, inspirée de l’attracteur de Lorenz. Certes l’Univers est régi par des modèles déterministes, que ce soit celui de Newton ou celui d’Einstein. Mais cela n’implique pas que l’avenir soit calculable, pas plus que le passé : nous avons vu assez d’exemples maintenant de systèmes chaotiques pour avoir compris que le temps caractéristique pose une limite à toute prévision. Mais cela n’implique pas non plus qu’au-delà du temps caractéristique, on ne puisse plus rien dire. Grâce au système de Lorenz, nous avons appris l’existence d’attracteurs étranges, vers lequel le système se porte naturellement pour ne plus le quitter. D’où que parte le système, nous savons où nous avons rendez-vous : sur l’attracteur étrange. Et voilà enfin une prédiction que nous pouvons faire avec certitude, bien au-delà du temps caractéristique : le système sera sur l’attracteur étrange.
Proposer pour l’Univers un modèle déterministe, c’est affirmer qu’il est soumis à des lois strictes, qui contraignent son évolution pour tout le temps qu’il a à vivre ; il ne doit pas quitter son attracteur étrange. Du point de vue physique, comme nous l’avons vu, cela veut dire que tous les états théoriquement possibles ne sont pas pratiquement réalisables, et que les états naturels, ceux qui peuvent apparaître au cours de l’évolution de l’Univers, doivent avoir des propriétés très particulières. C’est ainsi qu’apparaissent les lois physiques : ce sont des ensembles de relations qui caractérisent les états naturels parmi tous les états possibles. Ainsi les molécules de gaz occupant un volume donné peuvent en principe se répartir de manières très diverses ; on peut imaginer par exemple qu’elles soient toutes tassées dans un coin, réalisant localement une très haute pression, et laissant inoccupée la majeure partie du volume, où est réalisé momentanément un vide absolu. Mais un tel état, s’il est théoriquement possible, n’est pas naturel, en ce sens que le système le quittera spontanément et rapidement pour aller vers un état naturel, l’équilibre thermodynamique ; la pression et la température seront uniformes dans le récipient, et sont reliées par la loi de Mariotte.
Mais- et c’est là l’apport de la théorie du chaos- proposer un modèle déterministe c’est aussi laisser un espace au hasard, une dimension à l’imprévisible. Le système est confiné dans son attracteur étrange, certes ; mais son mouvement sur l’attracteur nous échappe. Plus exactement, le temps caractéristique T pose une borne aux possibilités de prévision ; rappelons que c’est le temps nécessaire pour qu’une erreur de position ou de perturbation du mouvement soit multipliée par dix. Pour des durées inférieures à T, on peut sans problème suivre le système par le calcul. Pour des durées supérieures à 10 T, on perd complètement sa trace ; tout ce que l’on peut dire (et c’est déjà une précision importante) est qu’il est sur l’attracteur étrange. Où exactement, on l’ignore.
Admirable et subtil dosage du hasard et de la nécessité !… Voici résolus d’un seul coup toute une armée de faux problèmes concernant la liberté humaine dans un univers déterministe. Nous ne voyons plus, comme Laplace, un ciel

dégagé ouvert sur un horizon infini, si clair cependant que nous avons l'impression de pouvoir le toucher. Ce n'est pas non plus un ciel couvert, noyé d'un brouillard qui arrête notre regard et nous dérobe tout horizon. Ce que nous voyons, ce sont les deux ensembles, comme un ciel de pluie, où les bourrasques nous ménagent quelques échappées vers des horizons lointains chargés de soleil.

Entre le modèle et la réalité : le calcul

Mais cette vision elle-même, en dépit de sa profondeur et de sa beauté, n'est pas à nos yeux l'apport le plus important de la théorie du chaos. Nous avons évoqué précédemment cette marge ténue qui sépare le zéro mathématique du presque rien, l'exactitude absolue de la meilleure approximation. Cette marge se glisse entre le modèle mathématique et le système physique qu'il est censé représenter. Pendant quatre siècles, elle est passée inaperçue, car les moyens de calcul disponibles limitaient strictement l'emploi des modèles déterministes et leur confrontation avec la réalité physique. C'est grâce à la théorie du chaos que cette marge est enfin discernée, et le développement de la science dans l'avenir lui accordera une attention de plus en plus grande. Entre le modèle mathématique et la réalité physique, un espace intermédiaire a été découvert, qui est celui du calcul.
Expliquons ceci. Jusqu'à l'invention des ordinateurs, les seuls calculs que l'on eut à effectuer sont ceux qui peuvent être faits avec un papier, un crayon et une gomme. Sauf de très rares exceptions sur lesquelles nous reviendrons, cela veut dire que l'on ne peut résoudre que des équations linéaires. Il existe dans la nature un certain nombre de systèmes qui sont régis par ce genre d'équations. Ces systèmes, dits linéaires, ont toujours un comportement très simple ; ils ne sont jamais chaotiques, leurs trajectoires sont toujours prévisibles, et leurs mouvements réguliers. Mais, jusque vers 1950, c'étaient les seuls dont on pouvait calculer les trajectoires et étudier le mouvement. L'attention des scientifiques s'est donc tout naturellement portée sur eux, et, pendant quatre siècles, on a vu se développer une foule de modèles linéaires de divers phénomènes allant de la physique à l'économie. Pendant tout ce temps, le modèle linéaire est roi. On l'utilise même pour étudier des systèmes chaotiques, comme la météorologie, parce que le modèle exact comporte des équations non-linéaires que l'on ne sait pas résoudre. À défaut de pouvoir utiliser le modèle exact, on construit des modèles linéaires, de plus en plus compliqués, approchant de mieux en mieux le système considéré, mais dont nous savons maintenant qu'ils n'en donneront jamais une idée exacte.

Bref, jusqu'au XXe siècle. La notion de modèle déterministe se confond avec celle de modèle linéaire. C'est ce qui explique par exemple l'erreur de Laplace. Celui-ci, et ses prédécesseurs avant lui, avait construit un modèle linéaire très perfectionné pour représenter le système solaire. Il avait cru que les propriétés de son modèle étaient les propriétés du système et que celui-ci était donc stable... Mais son modèle n'était qu'approché, justement parce qu'il était

linéaire et que le système est non linéaire, et nous savons maintenant que l'approximation cesse d'être valable au-delà du temps caractéristique, cent millions d'années environ. Cela, Laplace ne pouvait pas le savoir, car il n'avait pas les moyens de faire les calculs directement sur le modèle non linéaire, donc de connaître la qualité de son approximation (excellente, disons-le une fois de plus, à l'échelle humaine et avec les « moyens du bord »).

Il faut attendre le XXe siècle pour comprendre que les modèles non linéaires ont des propriétés fondamentalement différentes des modèles linéaires. Le siècle s'ouvre sur le grand ouvrage de Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste,* où il montre que les modèles linéaires employés par ses prédécesseurs, quelque poussés qu'ils soient, ne pourront jamais donner une idée exacte du comportement à long terme des orbites planétaires, et que le modèle exact, non linéaire, peut receler des trajectoires d'une complexité insoupçonnée jusqu'alors. Le siècle se ferme tandis que la théorie du chaos apporte la plus éclatante confirmation à l'intuition de Poincaré, et que notre connaissance des modèles non linéaires s'appuie désormais sur une multitude de résultats expérimentaux, de simulations numériques et de théorèmes mathématiques. Entre-temps s'est déroulée la révolution informatique, qui a permis de calculer enfin les solutions d'équations non linéaires et de les représenter graphiquement : sans cela, nous ignorerions encore l'existence de l'attracteur de Lorenz, et le caractère chaotique du système solaire.

Grâce aux ordinateurs, les modèles non linéaires sont enfin utilisables. La simulation numérique nous révèle leurs caractères propres, très différents de ceux des systèmes linéaires. Et l'analyse mathématique nous le confirme. La théorie du chaos est née de cette confrontation de l'ordinateur et du mathématicien. L'ordinateur révèle au mathématicien les phénomènes à étudier, et le mathématicien met en évidence les limites de l'ordinateur. Dans un système chaotique, certains calculs sont dépourvus de signification physique : on peut bien demander aux ordinateurs de la Météorologie Nationale quel temps il fera à Paris dans deux ans, ils donneront une réponse si on les laisse tourner assez longtemps, mais il n'y a aucun espoir que cette réponse calculée soit meilleure que celle que je pourrais deviner en me fondant sur les moyennes saisonnières.

C'est le début d'une révolution dans la conception des théories scientifiques. Dorénavant, entre la réalité physique et le modèle mathématique, la correspondance n'est plus immédiate : elle passe par un calcul. Plus jamais on ne dira : telle équation représente tel phénomène. Il faudra ajouter : le système est chaotique, son temps caractéristique est de tant, sachez qu'au-delà de cette durée certains calculs ne représentent plus rien, et si vous voulez calculer telle quantité, utilisez telle méthode plutôt que telle autre. En d'autres termes, on ne pourra plus énoncer une théorie scientifique sans dire ce qui est calculable dans cette théorie et ce qui ne l'est pas, et sans indiquer dans chaque cas les moyens de calcul appropriés. On savait déjà que les théories scientifiques ont des limites physiques de validité : le domaine de la mécanique classique, par exemple, est limité d'un côté par la mécanique quantique, de l'autre par la mécanique

relativiste. Il faudra désormais s'habituer à ce qu'elles aient également des limites numériques.
Je pense que cette révolution s'étendra également à l'enseignement des mathématiques, où les problèmes liés au calcul prendront une importance considérable.
Dans un article célèbre, le physicien David Ruelle s'était demandé si nos mathématiques étaient naturelles : de petits humanoïdes verts, vivant sur une planète gravitant autour de trois planètes rouges, et ayant donc de l'univers physique une expérience tout à fait différente de la nôtre, auraient-ils développé les mêmes mathématiques ? Nous ne le saurons peut-être jamais. Mais ce qui se passe en ce moment est une expérience analogue : la puissance de calcul désormais accessible aux hommes change leur univers. Elle transforme leur environnement, elle transforme leurs sociétés, elle les transforme eux-mêmes, elle transforme leur science. La théorie du chaos est un début, non une fin.

Laissons le mot de la fin (?) au physicien Niels Bohr :

La prévision est un art difficile, surtout quand elle concerne l'avenir

Bibliographie

[1] COLLECTIF, *La querelle du déterminisme, philosophie de la science d'aujourd'hui,* Paris, Gallimard 1990, 350 p.

[2] DAHAN DALMEDICO, Amy, Jean-Luc Chabert et Karine Chemla. *Chaos et déterminisme,* Paris, Éditions du Seuil, Collection Points-Sciences 1991, 406 p.

[3] EKELAND, Ivar, *Au hasard, la chance, la science et le monde,* Paris, Éditions du Seuil, Collection Sciences Ouverte, 1991, 199 p.

[4] EKELAND, Ivar, *Le calcul et l'imprévu,* Paris, Éditions du Seuil, Collection Points-Sciences 1984, 245 p.

[5] EKELAND, Ivar, *Le chaos ,* Paris, Flammarion, Collection Dominos 1995, 123 p.

[6] GENNES, DE, Pierre-Gilles, (sous la direction). *L'ordre du chaos,* Paris, Éditions Bélin, Collection Bibliothèque Pour La Science 1992, 208 p.

[7] GLEICK, James. *La théorie du chaos,* Paris, Éditions Flammarion, Collection Champs 1991, 431 p.

[8] JARROSSON, Bruno, *Invitation à la philosophie des sciences,* Paris, Éditions du Seuil, Collection Points-Sciences 1992, 233 p.

[9] RUELLE, David. *Hasard et chaos,* Paris, Éditions du Seuil, Collection Points-Odile Jacob 1993, 245 p.

[10] SOKAL, Alan et Jean Bricmont. *Impostures intellectuelles?,* Paris, Éditions Odile Jacob, 1997, 276 p.

[11] STEWART, Ian. *Dieu joue-t-il aux dés?,* Paris, Éditions Flammarion, Collection Champs 1997, 589 p.

[12] STEWART, Ian. *Les Mathématiques,* Paris, Éditions Belin, Collection Champs 1997, 589 p.

[13] STEWART, Ian. *La nature et les nombres,* Paris, Éditions Hachette, 1998, 177 p.

[14] THOM, René. *Prédire n'est pas expliquer,* Paris, Éditions Flammarion, Collection Champs 1993, 175 p.

[15] VERDIER, Norbert. *Qu'est-ce que les mathématiques* ? Le Pommier, Flammarion, Paris, 2000, 160 p.

POUR LA SCIENCE, *Le chaos*, Dossier Hors série, janvier 1995

LA RECHERCHE, *La science du désordre,* Numéro spécial, mai 1991

LA RECHERCHE, *Les savoirs de l'an 2000,* # 327, Janvier 2000

LES CAHIERS DES SCIENCES, *Comment l'ordinateur transforme les sciences* Octobre 1999.

SCIENCES ET AVENIR, *Les grandes idées du siècle*, Janvier 2000.